1. COMPACTS.

COMPACT = HAUSDORFF dont TOUT recouvrement OUVERT contient un recouvrement FINI

Pour toute partie P de l'espace topologique $E, \mathcal{T}$:
P compacte <u>ssi</u> le sous espace $P, \mathcal{T}_P$ est compact

RECOUVREMENT COMPACT
= Recouvrement dont les pièces sont compactes.

LA DÉCOUVERTE DE LA COMPACITÉ
A CHANGÉ
LA FACE DE LA SCIENCE

Jean LERAY

$E, \mathscr{P}_E$ compact ssi E fini

R, R_0, R^+ sont des Hausdorff NON COMPACTS

Arcs ouverts et semi-ouverts sont non compacts

E-pointés d'arcs ou de cycles sont non compacts

$\overline{\omega}, \mathcal{T}_{us}$ est compact

La partie P de l'Hausdorff $E, \mathcal{T}$ est compacte

ssi

Tout recouvrement ouvert $\mathscr{R} \subset \mathcal{T}$ de l'Ensemble P contient un recouvrement fini de P.

Dans $R, \leqslant, \mathcal{T}_{us}$: tout non borné est non compact
Dans $R^+, \leqslant, \mathcal{T}_{us}$: tout non majoré est non compact
Dans $R, \leqslant, \mathcal{T}_{us}$: tout compact est borné
Dans $R^+, \leqslant, \mathcal{T}_{us}$: tout compact est borné

SI le Hausdorff E,τ admet le recouvrement COMPACT FINI $\mathcal{K}$

ALORS E,τ est compact.

* Voici un recouvrement ouvert $\mathcal{R}$ de E,τ

Posons $\mathcal{K} = \{K_1, \dots, K_m\}$

Pour tout $i = 1, \dots, m$:

$\mathcal{R}$ est un recouvrement ouvert de K_i,

contient un recouvrement fini $\mathcal{F}$ de K_i

$\mathcal{R}$ contient le recouvrement fini $\bigcup_i \mathcal{F}$ de E

■

Tout fermé d'un compact est compact

▲ F fermé du compact K,τ

▲ recouvrement ouvert $\mathcal{R} \subset \tau$ de F.

* $K \setminus F \in \tau$ $\mathcal{R} \cup \{K\setminus F\}$ est un recouvrement ouvert de K.

▲ partie finie $\mathcal{F}$ de $\mathcal{R} \cup \{K\setminus F\}$ qui recouvre K

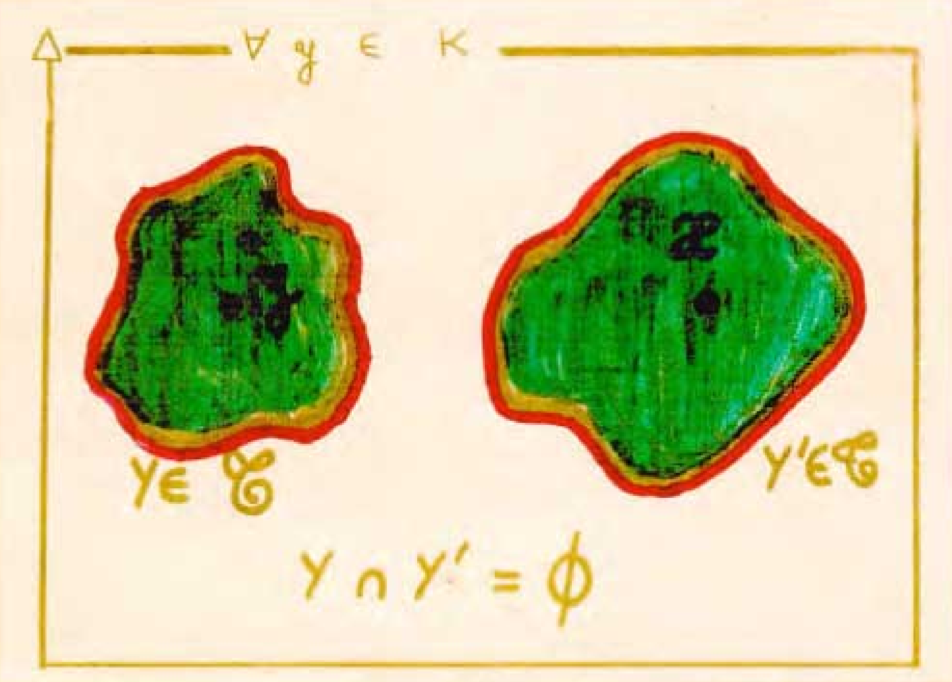
La partie finie $\mathcal{F} \setminus \{K\setminus F\}$ de $\mathcal{R}$ recouvre F

F compact

■

Tout compact d'un Hausdorff est fermé

- K compact du Hausdorff H, τ
- $x \in H \setminus K$



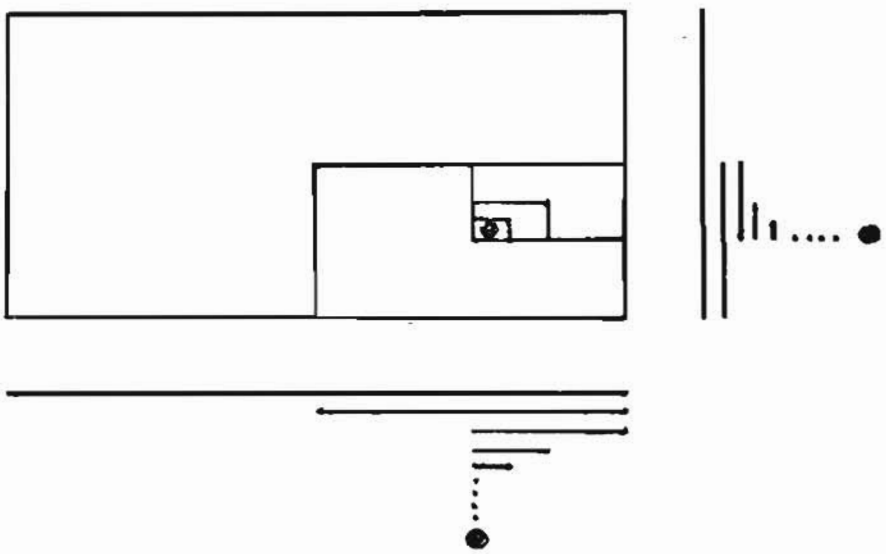
* $\{Y \mid y \in K\}$ est un recouvrement ouvert du compact K contient le recouvrement ouvert fini $\mathcal{F}$ de K.

$\bigcap \{Y' \mid y \in K \wedge Y \in \mathcal{F}\}$ est un ouvert de τ qui comprend x et ne rencontre pas K

Dans tout COMPACT : FERME = COMPACT

- Dans $\mathbf{R}^2$, l'intersection de toute $^\triangledown$suite binaire de rectangles$_\blacktriangle$ fermés emboîtés est [illegible] - singletonne

✱



■

- Dans $\mathbf{R}^n$, l'intersection de toute $^\triangledown$suite binaire de pavés$_\blacktriangle$ fermés emboîtés est [illegible] - singletonne ■

- DANS $\mathbf{R}^n, \mathcal{T}_{us}$, TOUT PAVE FERME EST COMPACT

► P_o , pavé fermé

► $\mathcal{R}$, recouvrement ouvert de P_o

✱ abs ● P_o n'est pas compact

⊢ Il existe une suite binaire $(P_i \mid i \in \omega)$
de pavés fermés emboîtés telle que :

$\forall i \in \omega$: P_i n'a pas de recouvrement ouvert fini contenu dans $\mathcal{R}$.

► $\{p\} = \bigcap P_i$

► $p \in U \quad \wedge \quad U \in \mathcal{R}$

$\exists i \in \omega$: $P_i \subset U$

⊢ $\exists i \in \omega$: P_i a un recouvrement ouvert fini contenu dans $\mathcal{R}$.

contradiction !

□ Dans $\mathbf{R}^n, \mathcal{T}_{us}$: tout borné est inclus à un compact

□ Dans $\mathbf{R}^n, \mathcal{T}_{us}$: tout fermé borné est compact ■

□ Dans $\mathbf{R}^n, \mathcal{T}_{us}$: tout non borné est non compact ■

□ Dans $\mathbf{R}^n, \mathcal{T}_{us}$: tout compact est borné ■

□ Dans $\mathbf{R}^n, \mathcal{T}_{us}$: tout compact est fermé borné ■

□ Dans $\mathbf{R}^n, \mathcal{T}_{us}$: COMPACT = FERME BORNE ■

□ Tout cercle de $\Pi, \mathcal{T}_{us}$ est compact ■

Dans tout COMPACT : FERMÉ = COMPACT

CONTINUITÉ respect COMPACITÉ

Si $f : E, \mathcal{T} \to F, \mathcal{U}$ continue $\wedge$ $P \subset E$ $\wedge$ $F, \mathcal{U}$ Hausdorff

Alors P compact $\Rightarrow$ fP compact.

▲ Recouvrement ouvert $\mathcal{R}$ de fP

* $\{ f^{-1} Y \mid Y \in \mathcal{R} \}$ est un recouvrement ouvert du Compact P.

contient un recouvrement fini

... qui peut s'écrire

$\{ f^{-1} Y \mid Y \in \mathcal{F} \}$ où $\mathcal{F}$ est une partie finie de $\mathcal{R}$

$\mathcal{F}$ recouvre fP

■

2 Il n'est pas vrai que toute bijection continue soit un homéo

Néanmoins

$\boxed{\text{Toute bijection continue d'un compact dans un Hausdorff est un homéo}}$

POINCARE

▲ Bijection continue $f : E, \mathcal{T} \rightarrow F, \mathcal{U}$
du compact $E, \mathcal{T}$ sur l'Hausdorff $F, \mathcal{U}$

* Tout fermé de $E, \mathcal{T}$ est compact.
Son image par f est un compact d'un Hausdorff, donc un fermé.
L'image par f de tout fermé de $E, \mathcal{T}$ est fermée
L'image par f de tout ouvert de $E, \mathcal{T}$ est un ouvert de $F, \mathcal{U}$
La bijection f^{-1} est continue
La bijection f est un homéo

■

<u>Si</u> $\mathcal{T}$ est une topologie de Hausdorff
et $\mathcal{U}$ une topologie compacte sur E

<u>Alors</u> $$\mathcal{T} \subset \mathcal{U} \Rightarrow \mathcal{T} = \mathcal{U}$$

Les topologies compactes sont minimales dans l'ensemble des topologies de Hausdorff.

* $1_E : E, \mathcal{U} \longrightarrow E, \mathcal{T}$ est une injection continue

$E, \mathcal{U}$ compact 1_E homéo

$$\mathcal{T} = \mathcal{U}$$

■

La topologie de tout épointé d'un compact définit celle du compact

▲ x est un point du compact $K, \mathcal{T}$ ∧ $x \in T \in \mathcal{T}$

* Tout compact est HAUSDORFF.

Le singleton $\{x\}$ est fermé. L'épointé $K\setminus\{x\}$ est ouvert

Ouvert du compact K ne comprenant pas x

= Ouvert de l'épointé $K\setminus\{x\}$

Reste à caractériser les ouverts T du compact K tels que $x \in T$

$K\setminus T$ est un fermé du compact K et donc un compact de $K\setminus\{x\}$.

Ouvert du compact K, comprenant x

= $K\setminus$ (compact de l'épointé $K\setminus\{x\}$)

■

SI E est un épointé des Compacts K_1 et K_2

ALORS la bijection $K_1 \longrightarrow K_2$ qui prolonge 1_E est un homéo

■

SI E_1, E_2 sont des épointés homéomorphes des compacts K_1 et K_2

ALORS K_1 et K_2 sont homéo

Tout homéo $E_1 \longrightarrow E_2$ se prolonge en un homéo $K_1 \longrightarrow K_2$.

■

□ Tout point d'un épointé compact admet un voisinage compact

▲ Voici deux points distincts x, y du compact K

* K est Hausdorff

Voici des ouverts X, Y tels que $x \in X$, $y \in Y$ et $X \cap Y = \phi$

$K \setminus Y \supset X \ni x$

$K \setminus Y$ est un voisinage de x (~~dans~~ de l'espace $K \setminus \{y\}$)

Y ouvert $K \setminus Y$ fermé $K \setminus Y$ compact

■

Exercices.

1. $1_E : E, \mathcal{T} \longrightarrow E, \mathcal{U}$ continue $\Leftrightarrow$ $\mathcal{U} \subset \mathcal{T}$

2. $1_E : E, \mathcal{P}_E \longrightarrow E, \{\phi, E\}$ est une bijection continue

$1_E : E, \mathcal{P}_E \longrightarrow E, \{\phi, E\}$ est homéo $\Leftrightarrow$ $\# E \leqslant 2$

3. Il existe des bijections continues non homéo.

4. $\mathbf{3} = \{0,1,2\}$ est une topologie sur $\mathbf{2} = \{0,1\}$

$\mathbf{2}$ muni de cette topologie, est l'espace de SIERPINSKI

5. L'espace de SIERPINSKI n'est pas un hausdorff

Le sous-espace $\{0\}$ est compact et non fermé

6. $\mathbb{R}$ n'est pas compact mais est localement compact

Tout cycle est, à un homéo près, son Alexandroff

7. $\mathbb{R}^+$ n'est pas compact mais est localement compact

Tout arc fermé est, à un homéo près, son Alexandroff

8. Tout arc ouvert est localement compact et non compact

L'Alexandroff d'un arc ouvert est un cycle

9. Tout arc semi-ouvert est localement compact et non compact

L'Alexandroff d'un arc semi-ouvert est un arc fermé

ESPACE LOCALEMENT COMPACT

= HAUSDORFF dont TOUT POINT admet un VOISINAGE COMPACT

Tout compact est localement compact

Tout épointé de compact est localement compact.

ÉPOINTÉ de COMPACT

= LOCALEMENT COMPACT

ALEXANDROFF

Reste à prouver

☐ <u>Tout localement compact est épointé de compact</u>

▲ Espace localement compact $E, \mathcal{T}$ et $x \notin E$

▲ $\mathcal{U} = \{ \{x\} \cup (E \setminus K) \mid K$ compact de $E, \mathcal{T} \}$

▲ $\mathcal{W} = \mathcal{T} \cup \mathcal{U}$

On va prouver que

☐ $\{x\} \cup E, \mathcal{W}$ <u>est compact</u>

On établira successivement

1. $\mathcal{W}$ est une topologie
2. $\{x\} \cup E, \mathcal{W}$ est HAUSDORFF
3. $\{x\} \cup E, \mathcal{W}$ est COMPACT.

* 1. $\phi \in \mathcal{T} \subset \mathcal{W}$ — $\phi \in \mathcal{W}$

ϕ est un compact de E

$$\{x\} \cup (E \setminus \phi) = \{x\} \cup E \in \mathcal{U} \subset \mathcal{W}$$

■

La réunion de toute partie de la topologie $\mathcal{T}$ appartient à $\mathcal{T}$ et donc à $\mathcal{W}$

Voici une partie $\{\{x\} \cup (E \setminus K_i) \mid i \in I\}$ de $\mathcal{U}$

$$\bigcup_i \left(\{x\} \cup (E \setminus K_i)\right) = \{x\} \cup \bigcup_i (E \setminus K_i) = \{x\} \cup \left(E \setminus \bigcap_i K_i\right)$$

L'intersection de tout ensemble de compacts est compacte

$\bigcap_i K_i$ compact du localement compact $E, \mathcal{T}$.

$$\bigcup_i \left(\{x\} \cup (E \setminus K_i)\right) \in \mathcal{U} \subset \mathcal{W}$$

Voici $T \in \mathcal{T}$ — $T = E \setminus F$ avec F fermé de $E, \mathcal{T}$

Voici $\{x\} \cup (E \setminus K) \in \mathcal{U}$

$$(E \setminus F) \cup \left(\{x\} \cup (E \setminus K)\right) = \{x\} \cup (E \setminus (F \cap K))$$

L'intersection d'un compact et d'un fermé est compacte

$F \cap K$ compact

$$T \cup \{x\} \cup (E \setminus K) \in \mathcal{U} \subset \mathcal{W}$$

La réunion de toute partie de $\mathcal{W}$ appartient à $\mathcal{W}$ ■

L'intersection de tout couple d'éléments de la topologie $\mathcal{T}$ appartient à $\mathcal{T}$

Voici un couple d'éléments de $\mathcal{U}$

$$\{x\} \cup (E \setminus K_1) \quad \text{et} \quad \{x\} \cup (E \setminus K_2)$$

$$(\{x\} \cup (E \setminus K_1)) \cap (\{x\} \cup (E \setminus K_2)) = \{x\} \cup (E \setminus (K_1 \cup K_2))$$

La réunion de tout couple de compacts est compacte

$$\{x\} \cup (E \setminus (K_1 \cup K_2)) \in \mathcal{U}$$

L'intersection de tout couple d'élément de $\mathcal{U}$ appartient à $\mathcal{U}$

Voici enfin $T \in \mathcal{T}$ et $\{x\} \cup (E \setminus K) \in \mathcal{U}$

$$T \cap (\{x\} \cup (E \setminus K)) = T \cap (E \setminus K) \ \ldots \in \mathcal{T}$$

<u>L'intersection de tout couple d'élément de $\mathcal{W}$ appartient à $\mathcal{W}$</u>

■ 1.

*2 <u>Si</u> u, v sont points distincts de $E, \mathcal{T}$

<u>Alors</u> $\exists\ U, V \in \mathcal{T} \quad u \in U \wedge v \in V \wedge U \cap V = \emptyset$

Pour établir que $\{x\} \cup E, \mathcal{W}$ est Hausdorff, reste à prouver que x peut être séparé, à la Hausdorff, de tout $y \in E$.

▲ $y \in E$ — $y \neq x$

Compacité locale ▲ Y voisinage compact de y dans $E, \mathcal{T}$

▲ $X = \{x\} \cup (E \setminus Y)$

Y voisinage de y dans $\{x\} \cup E, \mathcal{W}$

X voisinage de x dans $\{x\} \cup E, \mathcal{W}$

$X \cap Y = \phi$

■ 2.

* 3 ▲ $\mathcal{R}$ recouvrement ouvert de $\{x\} \cup E, \mathcal{W}$

▲ $x \in X \in \mathcal{R}$

$X \in \mathcal{W}$

$E \setminus X$ compact ... de $E, \mathcal{T}$ et de $\{x\} \cup E, \mathcal{W}$

$\mathcal{R}$ est un recouvrement ouvert du compact $E \setminus X$

▲ $\mathcal{F}$ partie finie de $\mathcal{R}$ qui recouvre $E \setminus X$

La partie finie $\mathcal{F} \cup \{X\}$ de $\mathcal{R}$ recouvre $\{x\} \cup E$

■ 3

■

Exercices.

1. $1_E : E, \mathcal{T} \longrightarrow E, \mathcal{U}$ continue $\Leftrightarrow \mathcal{U} \subset \mathcal{T}$

2. $1_E : E, \mathcal{P}_E \longrightarrow E, \{\phi, E\}$ est une bijection continue

$1_E : E, \mathcal{P}_E \longrightarrow E, \{\phi, E\}$ est homéo $\Leftrightarrow \# E < 2$

3. Il existe des bijections continues non homéo.

EXERCICES.

A un homéomorphisme près.

ALEXANDROFF	DE
	
	
	
	

A un homéomorphisme près

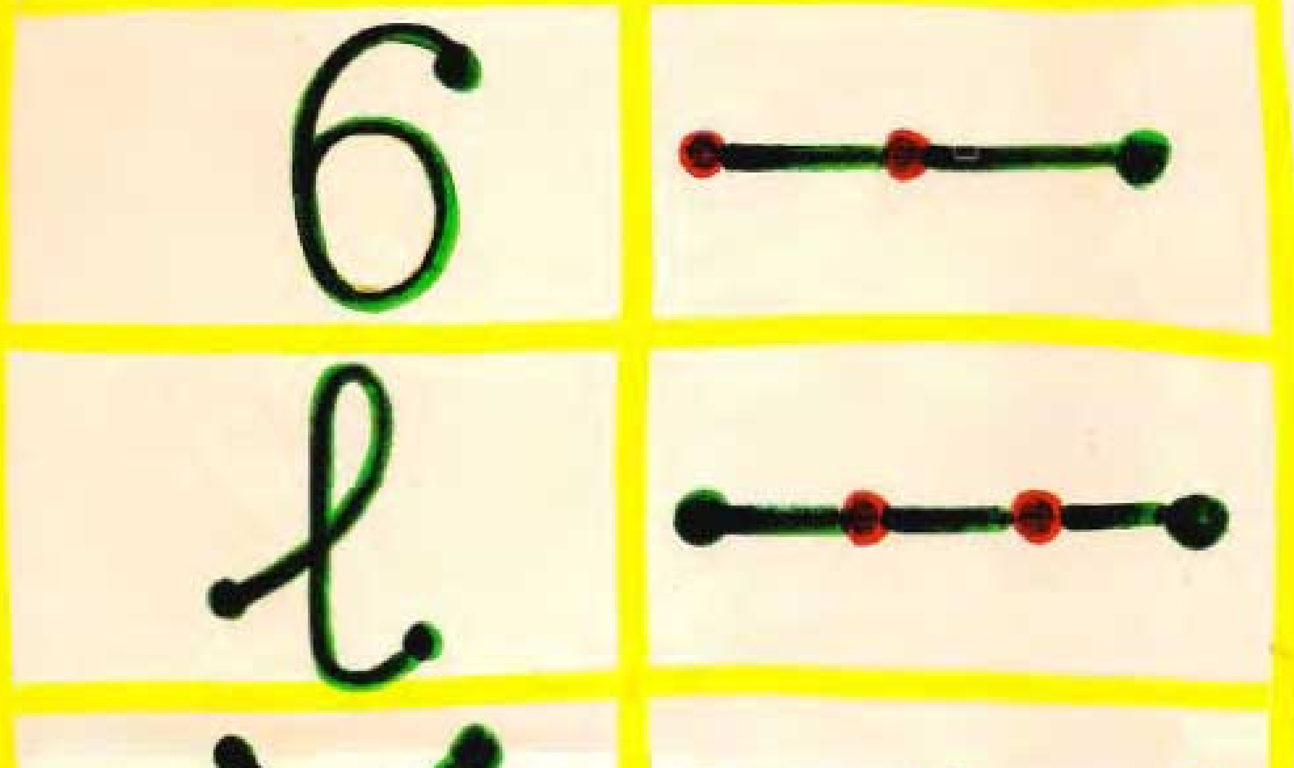
ALEXANDROFF de

A un homéomorphisme près,
de quel espace "Li Bia Bouquet" est-il
l'Alexandroff ?

"LI BIA BOUQUET"

A un homéomorphisme près

ALEXANDROFF	DE



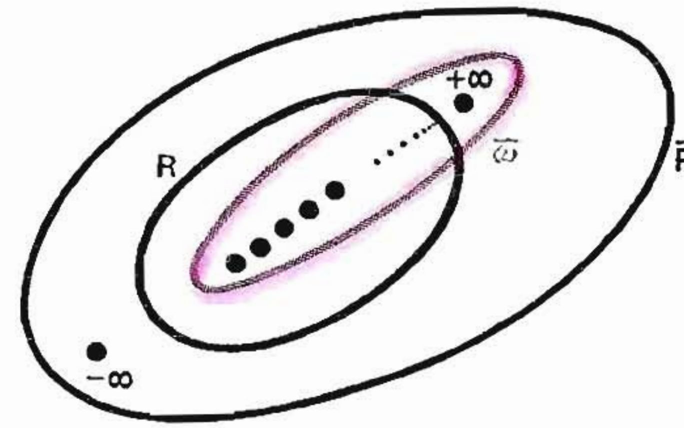
L'espace topologique $\overline{\omega}$, $\mathcal{T}_{us}$

Définition $\overline{\omega} = \omega \cup \{+\infty\}$

Par abus de notation, on écrira souvent ∞ au lieu de $+\infty$

La topologie du sous-espace topologique $\overline{\omega}$ de $\overline{\mathbf{R}}$ est appelée la topologie usuelle de $\overline{\omega}$

Espace topologique $\overline{\omega}$, $\mathcal{T}_{us}$



Tout singleton de ω est la trace sur $\overline{\omega}$ d'un ouvert de $\overline{\mathbf{R}}$

$$\forall n \in \omega : \{n\} =](n-\tfrac{1}{2})\,;(n+\tfrac{1}{2})[\cap \overline{\omega}$$

Dans la formule ci-dessus

$$](n-\tfrac{1}{2})\,;(n+\tfrac{1}{2})[$$

désigne un intervalle ouvert de $\mathbf{R}$, est un ouvert de $\overline{\mathbf{R}}$

$\{n\}$ est un ouvert de $\overline{\omega}$, $\mathcal{T}_{us}$

DÉFINITION

Pour tout point x d'un espace topologique

x **isolé** *ssi* $\{x\}$ ouvert.

Tout point de ω est un point isolé de $\overline{\omega}$, $\mathcal{T}_{us}$

Toute partie de ω est un ouvert de $\overline{\omega}$, $\mathcal{T}_{us}$

Amusement. Dans $\overline{\omega}$, $\mathcal{T}_{us}$: $\mathcal{P}\omega \subset \mathcal{T}_{us}$

Nous connaissons donc tous les ouverts de $\bar{\omega}$, $\mathcal{T}_{us}$ ... qui ne comprennent pas ∞ (toutes les parties de ω).

Reste à examiner les ouverts de $\bar{\omega}$, $\mathcal{T}_{us}$ qui comprennent ∞.

Voici un ouvert V de $\bar{\omega}$, $\mathcal{T}_{us}$ qui comprend ∞

$$+\infty \in V$$

V est la trace sur $\bar{\omega}$ d'un ouvert U de $\overline{\mathbf{R}}$, $\mathcal{T}_{us}$ qui comprend $+\infty$

$V = \bar{\omega} \cap U$ où U est un ouvert de $\overline{\mathbf{R}}$, $\mathcal{T}_{us}$ comprenant $+\infty$

U contient un intervalle $]r, +\infty]$ de $\overline{\mathbf{R}}$, $\leqq$

$V = \bar{\omega} \cap U$ contient un intervalle $]n, +\infty]$ de $\bar{\omega}$

V est la réunion de l'intervalle $]n, \infty]$ de $\bar{\omega}$ et d'une partie de $\{0, 1, 2, \dots, n-1\}$

$V = \bar{\omega} \setminus F$ où F est une partie finie de ω

Tout ouvert de $\bar{\omega}$, $\mathcal{T}_{us}$ qui comprend $+\infty$ est le complément dans $\bar{\omega}$ d'une partie *finie* de ω

Voici un ensemble W, complément dans $\bar{\omega}$ d'une partie finie G de ω

$$W = \bar{\omega} \setminus G$$

Appelons m le plus grand élément de G.

W est la réunion de l'intervalle $M =]m, +\infty]$ de $\bar{\omega}$, $\leqq$ et d'une partie finie H de ω

$$W = M \cup H$$

L'intervalle $M =]m, \infty]$ de $\bar{\omega}$, $\leqq$ est la trace sur $\bar{\omega}$ de l'intervalle $]m, \infty]$ de $\overline{\mathbf{R}}$

L'intervalle $]m, \infty]$ de $\overline{\mathbf{R}}$ est un ouvert de $\overline{\mathbf{R}}$, $\mathcal{T}_{us}$

M est un ouvert de $\bar{\omega}$, $\mathcal{T}_{us}$

H, partie de ω, est un ouvert de $\bar{\omega}$, $\mathcal{T}_{us}$

$M \cup H = W$ est un ouvert de $\bar{\omega}$, $\mathcal{T}_{us}$

Le complément dans $\bar{\omega}$ de toute partie finie de ω est un ouvert de $\bar{\omega}$, $\mathcal{T}_{us}$ qui comprend ∞

L'ensemble des ouverts de $\bar{\omega}$, $\mathcal{T}_{us}$ qui comprennent ∞ est l'ensemble des compléments dans $\bar{\omega}$ des parties finies de ω

Caractériser les ouverts de $\bar{\omega}$, $\mathcal{T}_{us}$

Dans $\bar{\omega}$, $\mathcal{T}_{us}$:

$$X \in \mathcal{T}_{us} \quad \text{ssi} \quad \left\{ \begin{array}{c} X \in \mathcal{P}\omega \\ \text{ou} \\ \bar{\omega} \setminus X \in \mathcal{P}_f\,\omega \end{array} \right.$$

(où $\mathcal{P}_f\,\omega$ désigne l'ensemble des parties *finies* de ω).

La topologie de $\overline{\mathbf{R}}, \mathcal{T}_{us}$ est entièrement définie par la structure d'ordre total de $\overline{\mathbf{R}}, \leqq$

La topologie de $\bar{\varpi}$ ne dépend pas de l'ordre de $\omega, \leqq$

SENSATIONNEL!

Mettre ce fait en évidence en étudiant les homéomorphismes de $\bar{\varpi}, \mathcal{T}_{us}$ dans $\bar{\varpi}, \mathcal{T}_{us}$

Caractériser topologiquement le point ∞ de $\bar{\varpi}, \mathcal{T}_{us}$

∞ est le seul point non isolé de $\bar{\varpi}, \mathcal{T}_{us}$

Tout homéo de $\bar{\varpi}, \mathcal{T}_{us}$ dans $\bar{\varpi}, \mathcal{T}_{us}$
applique ∞ sur ∞ ... et permute donc ω

Toute permutation de $\bar{\varpi}$ qui laisse ∞ fixe
permute $\mathcal{P}\,\omega$ permute $\mathcal{P}_f\,\omega$
permute la topologie usuelle de $\bar{\varpi}$

Toute permutation de $\bar{\varpi}$ qui laisse ∞ fixe est un homéo $\bar{\varpi}, \mathcal{T}_{us} \to \bar{\varpi}, \mathcal{T}_{us}$

L'ensemble des homéo $\bar{\varpi}, \mathcal{T}_{us} \to \bar{\varpi}, \mathcal{T}_{us}$
égale
l'ensemble des permutations de $\bar{\varpi}$ qui laissent ∞ fixe.

La proposition précédente exprime de manière plus précise que la topologie de $\bar{\varpi}, \mathcal{T}_{us}$ ne dépend pas de l'ordre de $\omega, \leqq$

Amusement. Noter l'ensemble des homéo $\bar{\varpi}, \mathcal{T}_{us} \to \bar{\varpi}, \mathcal{T}_{us}$

$$\{f \in \mathfrak{S}\,\bar{\varpi} \mid f(\infty) = \infty\}$$

Amusement. Représenter un homéo de $\bar{\varpi}, \mathcal{T}_{us}$

EXERCICE

Voici E et $\infty \notin E$

Veux-tu ériger $\overline{E} = E \cup \{\infty\}$ en espace topologique

... à la manière de $\overline{\omega}$, $\mathcal{T}_{us}$?

La topologie $\mathcal{T}$ demandée est l'ensemble des parties de E et des compléments dans $\overline{E}$ aux parties finies de E

Nous nous sommes bien gardés d'appeler $\mathcal{T}_{us}$ une telle topologie dans le cas général !

Quels sont les fermés de $\overline{\omega}$, $\mathcal{T}_{us}$

Jeu de mots : Dans $\overline{\omega}$, $\mathcal{T}_{us}$:

Un ensemble est fermé ss'il est fini ou comprend ∞ (l'infini).

Dans $\overline{\omega}$, $\mathcal{T}_{us}$

L'ensemble des parties non fermées de $\overline{\omega}$

égale

L'ensemble des parties infinies de ω

X, τ espace topologique

X^*, τ^* est Compactifié d'ALEXANDROFF de X, τ

<u>si</u>

$X^* = X \cup \{x\}$ où $x \notin X$

$\tau^* = \tau \cup \{\{x\} \cup X \setminus K \mid K \text{ compact de } \tau\}$

Ex.

compactifié d'Alexandroff de

" "

$\forall X, \tau$

X^*, τ^* est compact

X^*, τ^* homéo à X, τ

$\Downarrow$

$\# X \geq \aleph_0 \quad \wedge \quad X, \tau$ compact

- reste seul à prouver $\# X \geq \aleph_0$

$X^* = X \cup \{x\} \qquad x \notin X$

$\# X^* = \#(X \cup \{x\}) = \# X + 1 \geq \# X$

Si $\#X \in \omega$ Alors $\#X + 1 > \#X$

et tout espace homéo à son compactifié d'ALEXANDR[redacted]OFF est INFINI

Soit $\overline{\omega} = \omega \cup \{\infty\}$ [F3 p. 131]

$$\mathcal{T}_{us} = \mathcal{P}\omega \cup \{\overline{\omega} \setminus X \mid X \in \mathcal{P}_f\omega\}$$

Soit $\overline{\omega}^*, \mathcal{T}^*_{us}$

$$\mathcal{T}^*_{us} = \mathcal{T}_{us} \cup \{\overline{\omega}^* \setminus X \mid X \text{ compact de } \overline{\omega}\}$$

□ Dans tout compact fermé = compact ■ [F 3 p 251]

□ $\overline{\omega}, \mathcal{T}_{us}$ compact ■

□ $\mathcal{T}^*_{us} = \mathcal{P}\omega \cup \{\overline{\omega}^* \setminus X \mid X \text{ fermé de } \overline{\omega}\}$ ■

▲ $\overline{\omega}^* = \overline{\omega} \cup \{\otimes\}$; $\otimes \notin \overline{\omega}$

▲ $f : \overline{\omega}^* \to \overline{\omega}$:
$$\begin{aligned} \otimes &\longmapsto 0 \\ \omega &\xrightarrow{\text{bij}} \omega_0 \\ \infty &\longmapsto \infty \end{aligned}$$

□ f est une bijection de $\overline{\omega}^*$ sur $\overline{\omega}$ ■

$\overline{\omega}^*$ est un compact $\wedge$ $\overline{\omega}$ est Hausdorff

Toute bijection continue d'un Compact dans un Hausdorff est un homéo

[F3 p 255]

$f : \overline{\omega}^*, \tau^*_{us} \longrightarrow \overline{\omega}, \tau_{us}$ est un homéo

ssi

$f : \overline{\omega}^*, \tau^*_{us} \longrightarrow \overline{\omega}, \tau_{us}$ est continue

ssi

$\forall F$ fermé de $\overline{\omega}, \tau_{us}$ $\quad f^{-1} F$ fermé de $\overline{\omega}^*, \tau^*_{us}$

F fermé de $\overline{\omega}, \tau_{us} \iff F \in \mathcal{P}_f \omega \ \vee \ \infty \in F$

[F3 , p 135]

f bijection $E \to F$ — $X \subset E$

Si X est de complement fini

Alors $f X$ est de complement fini

$$\boxed{\begin{array}{l} f : \overline{\omega}^*, \tau_{us} \longrightarrow \overline{\omega}, \tau_{us} \\ \quad \otimes \longmapsto 0 \\ \forall x \in \omega \quad f(x) = x + 1 \\ \quad \infty \longmapsto \infty \\ \text{est continue} \end{array}}$$

X un ouvert de $\overline{\omega}, \tau_{us}$

Ou Bien $X \subset \omega$

Ou bien $0 \in X$

$\otimes \in f^{-1} X$

$\infty \notin f^{-1} X$

$f^{-1} X = \overline{\omega}^* \setminus Y$

Y comprenant ∞

Y fermé de $\overline{\omega}$

$\overline{\omega}^* \setminus Y$ ouvert de $\overline{\omega}^*$

Ou bien $0 \notin X$

$f^{-1} X \subset \omega$

$f^{-1} X$ ouvert de $\overline{\omega}$

$f^{-1} X$ ouvert de $\overline{\omega}^*$

Ou Bien $\infty \in X$ et X de complément fini

$\infty \in f^{-1} X$ et $f^{-1} X$ de complément fini

Ou bien

$f^{-1} X = \overline{\omega}^* \setminus F$

F partie finie de ω

F fermée de $\overline{\omega}$

$\overline{\omega}^* \setminus F$ ouvert de $\overline{\omega}^*$

Ou bien

$f^{-1} X = \overline{\omega} \setminus F$

F partie finie de ω

$\overline{\omega} \setminus F$ ouvert de $\overline{\omega}$

$\overline{\omega} \setminus F$ ouvert de $\overline{\omega}^*$

EX

$E, \mathcal{T}$ est QUASI - COMPACT

ssi

Tout recouvrement ouvert de E contient un recouvrement fini .

ssi

Tout ensemble de fermés d'intersection vide contient une partie finie d'intersection vide

ssi

Tout ensemble de fermés dont toutes les intersections finies sont non vides est d'intersection non vide

EX

COMPACT = ALEXANDROFF de chacun de ses points

EX

Pour toute fonction

$\mathbb{R} \to F, \mathcal{U}$ ou $\overline{\mathbb{R}} \to F, \mathcal{U}$ ou $\mathbb{R}^{+} \to F, \mathcal{U}$

CONTINUE = ARC

Pour le cas $\overline{\mathbb{R}} \to F, \mathcal{U}$, cf [FS] p. 213

Pour les cas $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^{+}$ on vérifie la continuité en chaque point, en considérant un intervalle fermé le comprenant ■